

Série N° 1 – Rappel Mathématique

Dans tout ce qui suit, on considère un repère orthonormé de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Exercice 1

Soient les vecteurs $\vec{v}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{v}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

1. Trouver les modules de \vec{v}_3 et $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.
2. Trouver les angles (\vec{v}_1, \vec{v}_2) et (\vec{v}_1, \vec{v}_3) .

Exercice 2

Reprendre les vecteurs de l'exercice 1 et trouver le résultat s'il existe, en précisant la nature (scalaire ou vecteur) de :

$$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3, \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \text{ et } \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3).$$

Exercice 3

Soient les vecteurs $\vec{v}_1 = \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + t\vec{k}$, $\vec{v}_2 = e^{-t}\vec{i} + 2 \cos 3t \vec{j} + 2 \sin 3t \vec{k}$.

- Déterminer le module de chaque vecteur.
- Calculer : $\frac{d\vec{v}_1}{dt}$ et $\frac{d\vec{v}_2}{dt}$, puis le module de chacun deux.

Exercice 4 : Analyse Dimensionnelle

Soit un pendule simple constitué d'une masse m accrochée à un fil de masse négligeable et de longueur l . On travaille dans le référentiel terrestre où le champ de gravitation est \vec{g} .

1. Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la période des petites oscillations de ce pendule s'écrit sous la forme $T = Cst \sqrt{\frac{l}{g}}$.
2. Quelle remarque concernant T mérite-t-elle d'être notée ?

Exercice 5 (Analyse Dimensionnelle)

Soit un gaz enfermé dans un récipient, la pression P qu'exerce ce gaz est due aux chocs des molécules sur la paroi interne. À priori P dépend de la densité n du gaz (n est le nombre des molécules par m^3), de la masse m de chaque molécule et de la vitesse moyenne \bar{v} de leur déplacement.

- En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver la formule de la pression P à une constante près.

Exercice 6

Une force $\vec{F} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ (N) provoque le mouvement d'un corps qui se déplace suivant le vecteur déplacement : $\vec{L} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ (m).

1. Trouver $W = \vec{F} \cdot \vec{L}$ (le travail de la force \vec{F}).
2. Déduire la projection de la force \vec{F} sur le vecteur déplacement \vec{L} .
3. Trouver la relation entre les composantes du vecteur déplacement $\vec{d} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, pour que le travail de \vec{F} soit nul.

Exercice 7 (À traiter en Cours)

Soit $\vec{A} = 5X^2\vec{i} + (2X + 1)\vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 5\vec{i} + (2X^2 - X)\vec{j} + 2X\vec{k}$.

1. Déterminer \vec{A} et \vec{B} dans le cas où $X = 0$ et $X = 1$.
2. Calculer $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ de deux manières différentes.

Soit $G(X, Y, Z) = 3X^2 + 9XY - 6Y^2Z - 3XZ + 5XYZ^2$ une fonction dans l'espace cartésien.

1. Calculer $\vec{D} = \overrightarrow{\text{grad}} G$.

Soit $\vec{C}(x, y, z) = (x^2 + 1)\vec{i} + (x + 5z)\vec{j} - (y^2 + 3x)\vec{k}$.

2. Calculer $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{C} = \vec{\nabla} \wedge \vec{C}$.

Exercice 8 (Calcul d'Incertitudes)

Une masse m est lâchée d'une hauteur h , à son arrivée au sol, elle avait une vitesse $v = \sqrt{2gh}$. Si la hauteur h est de 53,6 m, mesurée avec une incertitude absolue de 1 cm et l'accélération gravitationnelle $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ est connue avec une incertitude relative de 0,1%, estimer l'incertitude sur la valeur de la vitesse v calculée.